

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = 8x^2 - 6x + 1$

b) $y = 2x + 2021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2021$ không phải là hàm số bậc hai.

II. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ và trục đối xứng là đường thẳng } x = -\frac{b}{2a}.$$

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định tọa độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0; c)$ qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu bậc hai sau: $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

Giải

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$.

- Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$.

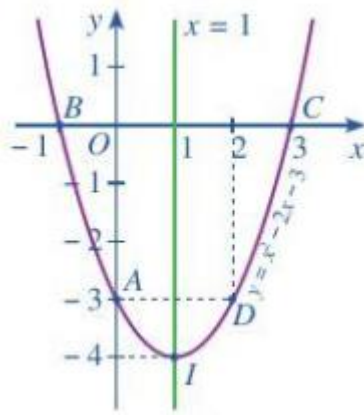
- Trục đối xứng $x = 1$.

- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0; -3)$.

- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1; 0)$ và $C(3; 0)$.

- Điểm đối xứng với điểm $A(0; -3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2; -3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như hình



Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
y	$+\infty$	$+\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
y	$-\infty$	$-\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Ví dụ 3. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

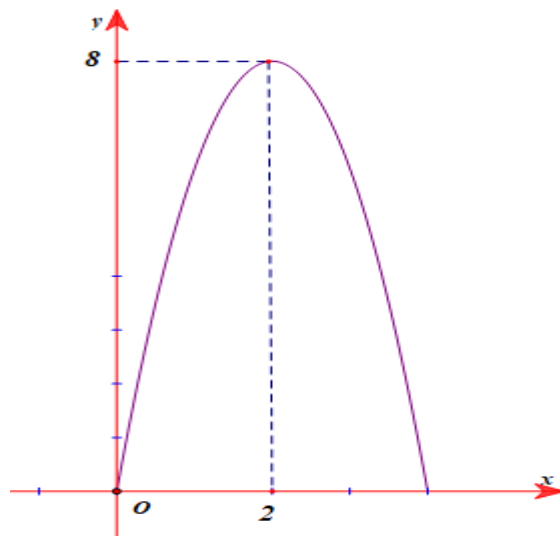
b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

III. Ứng dụng

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m.



- a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.
b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.
c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c (a < 0)$. Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(m)$

c) Cách 1. Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, có đồ thị là (P) .

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
- Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0; 3)$.
- Tìm tập hợp giá trị x sao cho $y \leq 0$.
- Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$.

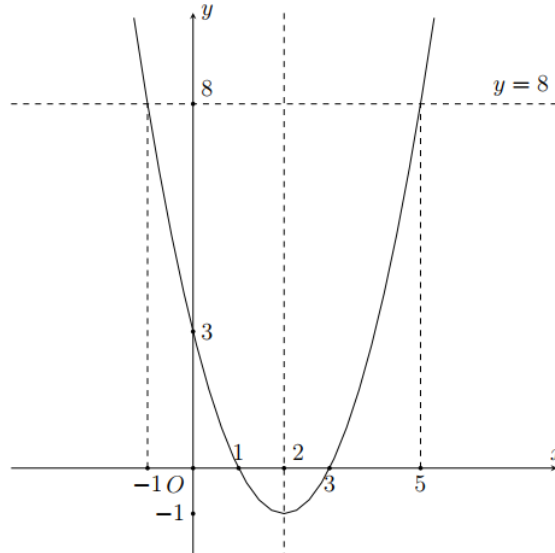
Lời giải

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
 - Tọa độ đỉnh $I(2; -1)$.
 - Trục đối xứng $x = 2$.
 - Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(3;0)$.



b) Ta có $(0;3) \in (0;2) \cap \{2\} \cap (2;3)$.

Trên khoảng $(0;2)$ hàm số nghịch biến, tại $x = 2$ thì hàm số đạt giá trị bằng -1 , trên khoảng $(2;3)$ hàm số đồng biến.

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy tập hợp các giá trị của x để $y \leq 0$ (đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành) là $1 \leq x \leq 3$.

d) Ta thấy đồ thị (P) cắt đường thẳng $y = 8$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5 .

Do đó để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$ thì $x \in (-\infty; -1)$ hoặc $x \in (5; +\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ nên nghịch biến trên đoạn $[-2;1]$. Do đó

• Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x = -2$, khi đó $y_{\max} = y(-2) = 15$.

• Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x = 1$, khi đó $y_{\min} = y(1) = 0$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 7x^2 - 3x + 10$.

b) $y = -2x^2 - x + 1$.

Lời giải

a) Hàm số $y = 7x^2 - 3x + 10$ có $a = 7 > 0$ nên y đạt giá trị bé nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\min} = -\frac{D}{4a} = \frac{271}{8}$ và không tồn tại giá trị lớn nhất.

b) Hàm số $y = -2x^2 - x + 1$ có $a = -2 < 0$ nên y đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\max} = -\frac{D}{4a} = \frac{9}{8}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x^2 - 3x$ với $0 \leq x \leq 2$.

b) $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leq x \leq 4$.

Lời giải

a) Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \notin [0; 2]$.

Vậy $\min y = f(0) = 0; \max y = f(2) = -2$.

b) Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$.

Ta có $f(4) = -29; f(0) = 3$.

Vậy $\min y = f(4) = -29; \max y = f(0) = 3$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

Lời giải

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{a}{2}$

• Nếu $\frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0$ thì $x_I < 0 < 2$. Suy ra f đồng biến trên $[0; 2]$.

Do đó $\min f(x) = f(0) = a^2 - 2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2 - 2a + 2 = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0, a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Vì $a < 0$ nên ta chọn $a = 1 - \sqrt{2}$.

• Nếu $0 \leq \frac{a}{2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra f đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min f(x) = f(\frac{a}{2}) = -2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán

$$-2a + 2 = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} < 0 \text{ (không thỏa mãn)}.$$

• Nếu $\frac{a}{2} > 2 \Rightarrow a > 4$ thì $x_I > 2 > 0$. Suy ra f nghịch biến trên $[0; 2]$.

Do đó $\min f(x) = f(2) = a^2 - 10a + 18$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2 - 10a + 18 = 3 \Rightarrow a^2 - 10a + 15 = 0 \Rightarrow a = 5 \pm \sqrt{10}$$

Vì $a > 4$ nên ta chọn $a = 5 + \sqrt{10}$.

Vậy $a = 1 - \sqrt{2}$ hoặc $a = 5 + \sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x(x+1)(x-2)(x-3)$.

b) $y = (2x-1)^2 - 4|2x-1| + 3$.

Lời giải

a) Ta có $y = x(x+1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)$.

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, ta được $y = f(t) = (t-1)(t-4) = t^2 - 5t + 4, t \geq 0$.

Hàm số $y = t^2 - 5t + 4$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \in [0; +\infty)$.

Do đó $\min y = \min f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ đạt được khi $(x-1)^2 = \frac{5}{2} \hat{=} x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) Đặt $t = |2x-1| \geq 0$ thì $y = t^2 - 4t + 3, t \geq 0$.

Hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_1 = -\frac{b}{2a} = 2 \in [0; +\infty)$.

Do đó $\min y = \min f(t) = f(2) = -1$ đạt được khi $|2x-1| = 2 \hat{=} x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^2 + 5x - 4$, có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Dựa vào đồ thị trên, tùy theo giá trị của m , hãy cho biết số nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$.

c) Tìm m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm $x \in [2; 5]$.

Lời giải

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

• Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

• Trục đối xứng $x = \frac{5}{2}$.

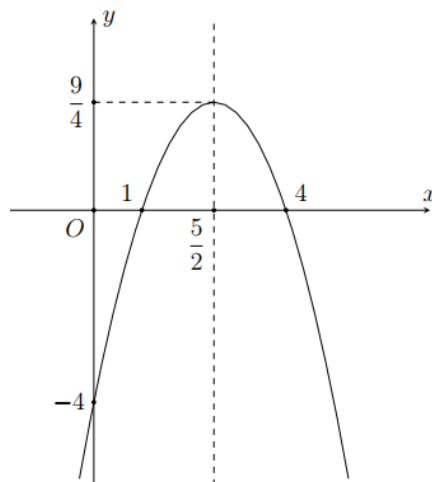
• Hệ số $a = -1 < 0$: bề lõm quay xuống dưới.

• Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$-\infty$

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; -4)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(4; 0)$.



b) Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 = 2m + 3 (*)$.

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng $y = 2m + 3$ (song song với Ox). Do đó số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị ta có

- $2m + 3 > \frac{9}{4} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{8}$: phương trình vô nghiệm.
- $2m + 3 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{8}$: phương trình có nghiệm kép.
- $2m + 3 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow m < -\frac{3}{8}$: phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Ta có bảng biến thiên của hàm số trên $\mathbb{R}$ như sau

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	5	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$\frac{9}{4}$	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến ta thấy $x \in \mathbb{R}$ thì $y \in (-\infty; \frac{9}{4}]$.

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$-4 \leq 2m + 3 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{8}.$$

Câu 7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$.

b) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

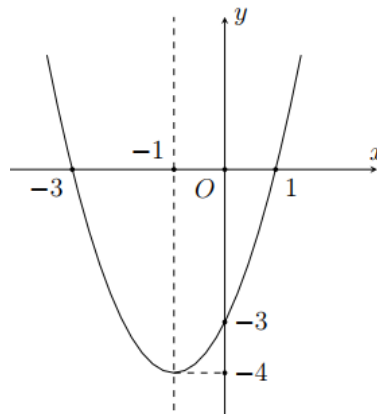
Lời giải

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

- Tọa độ đỉnh $I(-1; -4)$.
- Trục đối xứng $x = -1$.
- Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.



a) Ta có $y = |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 + 2x - 3) & \text{khi } x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$ như sau:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành

Câu 8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ b) $y = x^2 + 2|x| - 3$

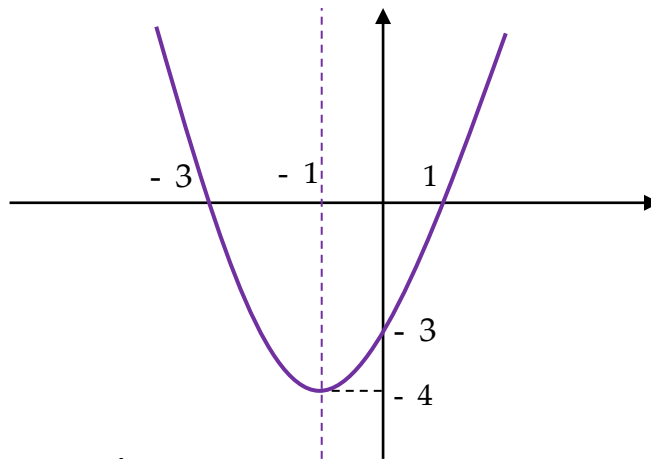
Lời giải

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

- ☐ Tọa độ đỉnh $I(-1; -4)$.
- ☐ Trục đối xứng $x = -1$.
- ☐ Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- ☐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- ☐ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

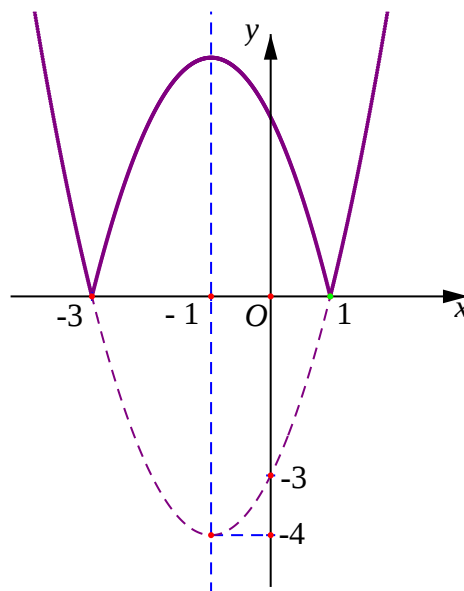
- ☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.



a) Ta có $y = |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -f(x) = -(x^2 + 2x - 3) & \text{khi } x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$ như sau :

- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

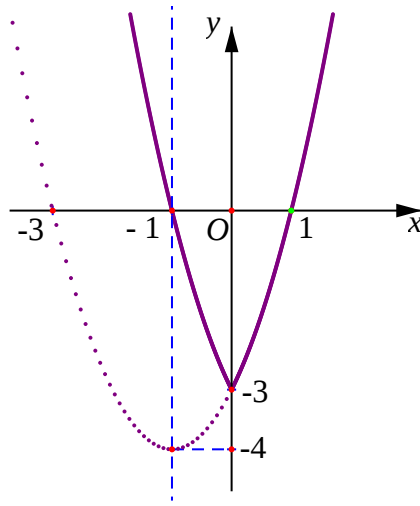


b) Ta có $y = h(x) = x^2 + 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = h(x) = x^2 + 2|x| - 3$ như sau :

- ☐ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải trục tung.
- ☐ Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = h(x)$.



Câu 9. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x - 4)|x - 2| + m = 0$.

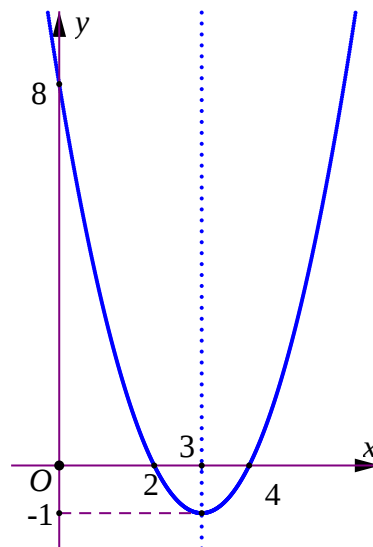
Lời giải

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P): y = x^2 - 6x + 8$.

- ☐ Tọa độ đỉnh $I(3; -1)$
- ☐ Trục đối xứng $x = 3$
- ☐ Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- ☐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- ☐ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

- ☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 8)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(4; 0)$ và $C(2; 0)$.

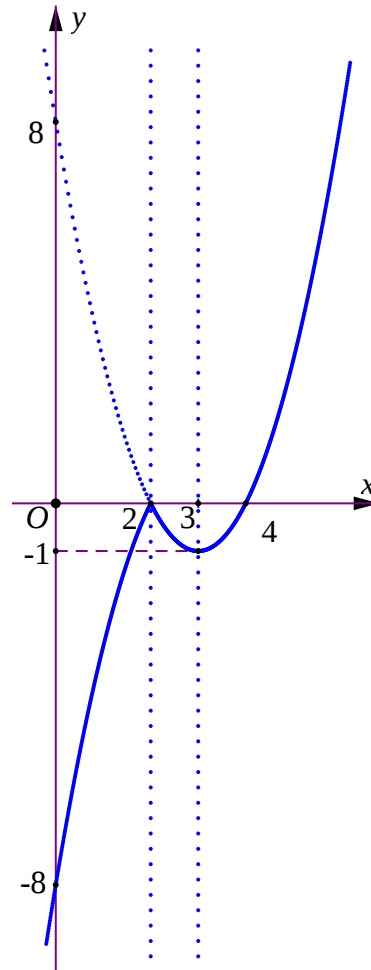


b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x - 4)|x - 2| + m = 0$.

Ta có $y = (x-4)|x-2| = \begin{cases} (x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 \geq 0 \\ -(x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 < 0 \end{cases}$ hay $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x^2 - 6x + 8) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ suy ra đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ như sau

- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải đường $x = 2$ ta giữ nguyên.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên trái đường $x = 2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành.



Phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0 \Leftrightarrow (x-4)|x-2| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ và đường thẳng $y = -m$ (song song với Ox). Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị, ta có

- ☐ $\begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$: phương trình có 1 nghiệm duy nhất.
- ☐ $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$: phương trình có 2 nghiệm.
- ☐ $-1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: phương trình có 3 nghiệm.

Câu 10. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

Khi $x < 1$ thì $y = -x + 4$.

Cho $x = 1$ & $y = 3$, ta được điểm $A(1;3)$.

Cho $x = 0$ & $y = 4$ ta được điểm $B(0;4)$.

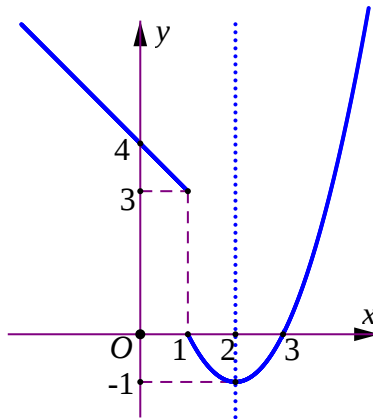
Khi $x^3 - 1$ thì $y = x^2 - 4x + 3$.

Tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.

Hệ số $a = -1 < 0$: bề lõm quay lên trên.

Cho $x = 1$ & $y = 0$ ta được điểm $M(1;0)$.

Cho $x = 3$ & $y = 0$ ta được điểm $N(3;0)$.



Câu 11. Không vẽ đồ thị. Hãy tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 5$

b) $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

Lời giải

a) Hàm số $y = 2(x + 3)^2 - 5 = 2x^2 + 12x + 13$

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 2} = -3$ & $y = -5$

Tọa độ đỉnh $I(-3; -5)$

Trục đối xứng là đường thẳng $x = -3$

Hệ số $a = 2 > 0$: bề lõm quay lên nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại tung độ đỉnh và bằng -5

b) Hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot (-\sqrt{2})} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ suy ra $y = 2\sqrt{2}$.

Tọa độ đỉnh $I(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

Trục đối xứng đường thẳng $x = -\sqrt{2}$.

Hệ số $a = -\sqrt{2} < 0$: bề lõm quay xuống dưới nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại tung độ đỉnh và bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Xét dấu hệ số a và biệt thức D khi

- a) (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.
- b) (P) hoàn toàn nằm phía dưới trục hoành.
- c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

Lời giải

- a) Theo giả thiết thì bề lõm hướng lên trên và đỉnh có tung độ dương nên

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{D}{4a} > 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}.$$

- b) Theo giả thiết thì bề lõm hướng xuống dưới và đỉnh có tung độ âm nên

$$\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{D}{4a} < 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}.$$

- c) Theo giả thiết thì
- $$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{D}{4a} > 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} D > 0 \\ a < 0 \end{cases}.$$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{cases}.$

- Trên $\square$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này $\max_{\square} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này $\min_{\square} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Câu 1. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x = -3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

a) Vì parabol (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên điểm $A(2; 0)$ thuộc (P) .

Thay $x = 2, y = 0$ vào (P) , ta được $0 = 4a + 6 - 2 \hat{U} a = -1$.

Vậy (P): $y = -x^2 + 3x - 2$.

b) Vì (P) có trục đối xứng $x = -3$ nên $-\frac{b}{2a} = -3 \Rightarrow \frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = 6a$.

Vậy (P): $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

c) Vì (P) có đỉnh $I(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4})$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{D}{4a} = -\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ D = 11a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 9 + 8a = 11a \end{cases} \Rightarrow a = 3.$$

Vậy (P): $y = 3x^2 + 3x - 2$.

d) Vì (P) đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên suy ra

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{3}{2a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không có (P) nào thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = 2x^2 + x + 2$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{D}{4a} = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 16a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = x^2 - 4x + 2$.

c) Vì (P) đi qua điểm $A(3; -4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} 9a + 3b + 2 = -4 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} 3a + b = -2 \\ b = \frac{3}{2}a \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$.

d) Vì (P) đi qua điểm $B(-1; 6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} a - b + 2 = 6 \\ \frac{D}{4a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} a - b = 4 \\ b^2 - 4ac = a \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 8(4 + b) = 4 + b \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 9b - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\hat{=} \quad \begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}.$$

□ Với $\begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases}$ ta có $(P): y = 16x^2 + 12x + 2$.

□ Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ ta có $(P): y = x^2 - 3x + 2$.

Câu 3. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0; 4)$.

b) Có đỉnh $I(-1; -2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0; -1)$ và $B(4; 0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1; -2)$.

Lời giải

a) Vì (P) có trục đối xứng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1 \quad \hat{=} \quad b = -2a \quad \hat{=} \quad b = -4$.

Hơn nữa (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0; 4)$ nên $2.0 + b.0 + c = 4 \quad \hat{=} \quad c = 4$.

Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(-1; -2)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ \frac{D}{4a} = -2 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} b = 2a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} b = 4 \\ 16 - 8c = 16 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = 2x^2 + 4x$.

$$\text{c) Vì } (P) \text{ đi qua hai điểm } A(0;-1) \text{ và } B(4;0) \text{ nên suy ra } \begin{cases} 2.0 + b.0 + c = -1 \\ 32 + 4b + c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} c = -1 \\ b = -\frac{31}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = 2x^2 - \frac{31}{4}x - 1.$$

$$\text{d) Vì } (P) \text{ có hoành độ đỉnh } -2 \text{ nên } -\frac{b}{2a} = -2 \hat{=} b = 4a \hat{=} b = 8.$$

$$\text{Hơn nữa } (P) \text{ đi qua điểm } N(1;-2) \text{ nên } 2 + b + c = -2 \hat{=} 2 + 8 + c = -2 \hat{=} c = -12.$$

$$\text{Vậy } (P): y = 2x^2 + 8x - 12.$$

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2;0)$.

Lời giải

$$\text{a) Vì } (P) \text{ đi qua hai điểm } M(1;1), B(2;-2) \text{ nên suy ra } \begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = -x^2 + 2.$$

$$\text{b) Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(0;3) \text{ và giao với } Ox \text{ tại } A(-2;0) \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 3 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} c = 3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{3}{4}x^2 + 3.$$

Câu 5. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

Lời giải

a) Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua $M(-2;1)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}.$$

b) Vì (P) có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 9a - 12 + c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ 9a + c = 12 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = x^2 - 4x + 3.$$

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Lời giải

a) Vì (P) đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$ nên suy ra
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -3 \\ c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -x^2 + 2x$.

b) Gọi A và B là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là -1 và 2 . Suy ra $A(-1;0)$, $B(2;0)$.

Gọi C là giao điểm của (P) với trục Oy có tung độ bằng -2 . Suy ra $C(0;-2)$.

Theo giả thiết (P) đi qua ba điểm A, B, C nên ta có
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 2$.

c) Gọi E và F là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là 1 và 3 . Suy ra $E(1;0)$, $F(3;0)$.

Theo giả thiết (P) đi qua ba điểm M, E, F nên ta có

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = -6 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} c = -a - b \\ 15a + 3b = -6 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = -6 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -2x^2 + 8x - 6$.

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Lời giải

a) Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên ta có
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ \frac{D}{4a} = -1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = 4a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \quad (1)$$

Gọi A là giao điểm của (P) với trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 . Suy ra $A(0; -3)$. Theo giả thiết $A(0; -3)$ thuộc (P) nên $a.0 + b.0 + c = -3 \Rightarrow c = -3$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} b = 4a \\ 16a^2 + 8a = 0 \\ c = -3 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -\frac{1}{2}; b = -2; c = -3$.

Vậy $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

b) Vì (P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0), B(3;0)$ nên

$$\begin{cases} 0 = a.1 + b.1 + c \\ 0 = a.9 + b.3 + c \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hơn nữa (P) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = -1$ nên

$$-\frac{D}{4a} = -1 \hat{=} D = 4a \hat{=} b^2 - 4ac = 4a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1, b = -4, c = 3$.

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{D}{4a} = 0 \hat{=} D = 0 \hat{=} b^2 - 4a = 0$ (1)

Hơn nữa (P) đi qua hai điểm $M(0;1), N(2;1)$ nên ta có $\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 4a = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1; b = -2; c = 1$.

Vậy $(P): y = x^2 - 2x + 1$.

d) Vì (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$ nên $-\frac{b}{2a} = 3 \hat{=} b = -6a$. (1)

Hơn nữa (P) qua $M(-5;6)$ nên ta có $6 = 25a - 5b + c$. (2)

Lại có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-2 = a.0 + b.0 + c \hat{=} c = -2$. (3)

$$\text{Từ (1),(2) và (3) ta có hệ } \begin{cases} b = -6a \\ 25a + 30a - 2 = 6 \\ c = -2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = \frac{8}{55} \\ b = -\frac{48}{55} \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy (P): } y = \frac{8}{55}x^2 - \frac{48}{55}x - 2.$$

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Đạt cực đại bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

Lời giải

a) Vì hàm số đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{D}{4a} = 4 \\ c = 6 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ c = 6 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 8a = 0 \\ c = 6 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 6$.

$$\text{Vậy (P): } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6.$$

b) Vì hàm số đạt cực đại bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{D}{4a} = 3 \\ c = -1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -12a \\ c = -1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 + 16a = 0 \\ c = -1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -1$, $b = 4$, $c = -1$.

$$\text{Vậy (P): } y = -x^2 + 4x - 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Lời giải

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$ nên ta có $4m + 4m - 3m - 2 = 3 \Rightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$. Do đó tọa độ đỉnh $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết đỉnh I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên ta có

$$-4m - 2 = 3 \cdot 1 - 1 \Rightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Theo câu b) ta có tung độ đỉnh $y = -\frac{D}{4a} = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 thì $\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{D}{4a} = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6 .

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số  có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2; 4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \text{ (nhận)} \\ c = 6 \end{cases}$$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\min_{[-2; 0]} f(x) = 3$.

Lời giải

Ta có $a = 4 > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh

$$x_I = \frac{m}{2}.$$

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2; 0]$.

$$\text{Do đó } \min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16.$$

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I = \frac{m}{2}$.

$$\text{Do đó } \min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m.$$

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_l > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$ (Vì $m > 0$).

Từ các trường hợp trên, ta được $m \in \left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}$.

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

- i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Câu 1. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau

a) $y = 2x - 3$ và $y = x^2 - 5x + 9$.

b) $y = 2x^2 + x - 3$ và $y = -x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

a) Tọa độ giao điểm của $y = 2x - 3$ và $y = x^2 - 5x + 9$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 5x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(4; 5)$ và $(3; 3)$.

b) Tọa độ giao điểm của $y = 2x^2 + x - 3$ và $y = -x^2 + 3x + 2$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 2 \\ 3x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{34}{9} \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(-1; -2)$ và $(\frac{5}{3}; \frac{34}{9})$.

Câu 2. Cho parabol $y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m$. Tìm các giá trị m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . tìm tọa độ trung điểm của AB .

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) d không cắt (P) .

d) d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$-x^2 + 4x - 2 = -2x + 3m \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3m + 2 = 0 (*)$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } \Leftrightarrow \Delta = 9 - (3m + 2) > 0 \Leftrightarrow 7 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{3}.$$

Tọa độ trung điểm AB có dạng $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ với x_A, x_B là nghiệm của $(*)$.

Theo định lý Viet, ta có $x_A + x_B = 6$, suy ra $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$.

$$\text{Ta có } \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2x_A + 3m) + (-2x_B + 3m)}{2} = -(x_A + x_B) + 3m = -6 + 3m.$$

Vậy $I(3; -6 + 3m)$.

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 9 - (3m + 2) = 0 \Leftrightarrow 7 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Với $m = \frac{7}{3}$ phương trình $(*)$ có nghiệm kép (nghiệm duy nhất) $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

Thay $x = 3$ vào hàm số $y = -x^2 + 4x - 2$, ta được $y = 1$.

Vậy tọa độ điểm chung là $(3; 1)$.

c) d không cắt (P) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 9 - (3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 7 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

d) Gọi $M(x_M; y_M)$ là giao điểm của d và (P) . Giao điểm này nằm trên đường thẳng $y = -2$ suy ra $y_M = -2$.

Mặt khác M thuộc (P) nên thay $x = x_M$ và $y = y_M = -2$ vào (P) ta được

$$-2 = -x_M^2 + 4x_M - 2 \Leftrightarrow x_M^2 - 4x_M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ x_M = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; -2) \\ M(4; -2) \end{cases}.$$

□ Với $M(0; -2)$, vì M cũng thuộc d nên ta có $-2 \cdot 0 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.

□ Với $M(4; -2)$, vì M cũng thuộc d nên ta có $-2 \cdot 4 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

a) d và (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 - 4x + 3 = mx + 3$

$$\hat{U} \quad x^2 - (4+m)x = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4+m \end{cases}$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi $4+m > 0 \hat{U} m < 4$.

Với $x = 0$ thì $y = 3$ suy ra $A(0;3)$. Với $x = 4+m$ thì $y = m^2 + 4m + 3$ suy ra $B(4+m; m^2 + 4m + 3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA . Suy ra $BH = |x_B| = |4+m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{9}{2} \hat{U} \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{9}{2} \hat{U} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \frac{9}{2} \hat{U} |m+4| = 3 \hat{U} \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Giả sử $x_1 = 0$ và $x_2 = 4+m$. Theo giả thiết, ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = 8 \hat{U} 0 + (4+m)^3 = 8 \hat{U} 4+m = 2 \hat{U} m = -2.$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2. Áp dụng cho trường hợp không tìm cụ thể x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = 8 \hat{U} (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 (*)$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (4+m)x = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4+m \\ x_1x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Thay vào } (*), \text{ ta được } (4+m)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (4+m) = 8 \hat{U} m = -2. \quad \square$$

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh I của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

$$\text{a) } y = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1.$$

$$\text{b) } y = x^2 - 2mx + m^2 - 1.$$

Lời giải.

$$\text{a) Phương trình hoành độ giao điểm của } (P) \text{ và trục hoành là } x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{m^2}{4} - 1\right) = 4 > 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

$$\text{Ta có } x = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \text{ suy ra } y = -1. \text{ Do đó tọa độ đỉnh } I \left(\frac{m}{2}; -1\right).$$

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

$$\text{b) Phương trình hoành độ giao điểm của } (P) \text{ và trục hoành là } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

$$\text{Ta có } D = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = m$ suy ra $y = -1$. Do đó tọa độ đỉnh $I(m; -1)$.

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

Câu 5. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số $\hat{U} y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi

$m \hat{U} m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0$, với mọi m

$$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13 \end{cases}$$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1; -3)$ hoặc $A_2(-3; 13)$ với mọi giá trị m .

Câu 6. Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.

b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1 (m \neq 0)$.

Lời giải.

a) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b$

$$\hat{U} 2x^2 - (8m-4+a)x + 8m^2 - 3 - b = 0. (1)$$

Yêu cầu bài toán $\hat{U}$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\hat{U} D = (8m-4+a)^2 - 8(8m^2-3-b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\hat{U} 16(-4+a)m + (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\hat{U} \begin{cases} -4+a = 0 \\ (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$.

b) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^2 - (4m-1)x + 4m-1 = ax + b$

$$\hat{U} mx^2 - (4m-1+a)x + 4m-1-b = 0. (2)$$

Yêu cầu bài toán $\hat{U}$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\hat{U} D = (4m-1+a)^2 - 4m(4m-1-b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\hat{U} 16m^2 + 8m(-1+a)m + (-1+a)^2 - 16m^2 + 4m(1+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\hat{U} 4(2a+b-1)m + (-1+a)^2 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\hat{U} \begin{cases} 2a+b-1 = 0 \\ -1+a = 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 7. Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2 \quad (m \neq 0).$

b) $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2 \quad (m \neq \frac{1}{2}).$

Lời giải.

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 2mx = m^2 + 4m + 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2m)x + c + m^2 - 4m - 2 = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Delta = (b - 2m)^2 - 4a(c + m^2 - 4m - 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - a)m^2 - 4(b - 4a)m + b^2 - 4ac + 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ b - 4a = 0 \\ b^2 - 4ac + 8a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4m + 2)x + c + 4m^2 + 2 = 0. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Delta = (b - 4m + 2)^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - (b + 2)m + 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(1 - a)m^2 - 8(b + 2)m + (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ b + 2 = 0 \\ (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x - 2$.

DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

Dạng 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

a. Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

b. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Lời giải

a. Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t-1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t = 1$ giây.

b. Ta có: $-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

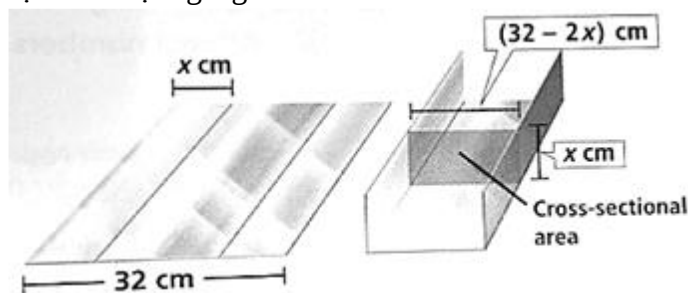
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$ (tính bằng mét), t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t \Rightarrow h(3) = 48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x-8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0;16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

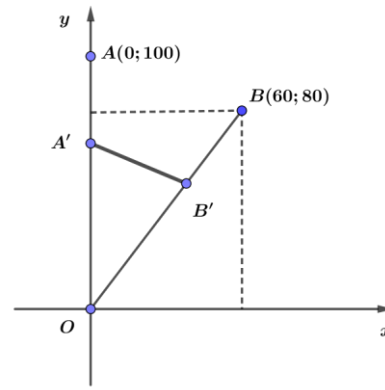
Vậy $x=8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là

$$k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60-6t; 80-8t).$

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60-6t; -20-3t).$

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0;10]$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0;10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540.$

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000.$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.